GLOBAL CONTINUIDAD Y DERIVADAS

***1)* Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:** **(3 puntos)**

a) $f(x) = \sqrt{2x - 3x^4}$

b) $f(x) = \ln \dfrac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = e^{7x^4 - 3}$

***2)*a) Estudia la continuidad de la función:** **(2 puntos)**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

b) Represéntala gráficamente.

***3)* Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$** **(1 punto)**

***4)* Representa gráficamente la siguiente función, haciendo un estudio previo lo más completo posible:**

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$ **(2 puntos)**

***5)* Representa gráficamente la siguiente función, haciendo un estudio previo lo más completo posible:**

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$ **(2 puntos)**

SOLUCIONES

1) a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}}\cdot\left(2-12x^3\right)=\dfrac{2-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}}=\dfrac{2\left(1-6x^3\right)}{2\sqrt{2x-3x^4}}=\dfrac{1-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{4x^3-3}{x^2-1}}\,\dfrac{12x^2\left(x^2-1\right)-\left(4x^3-3\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{\left(x^2-1\right)\left(4x^3-3\right)}=\dfrac{4x^4-12x^2+6x}{\left(x^2-1\right)\left(4x^3-3\right)}$

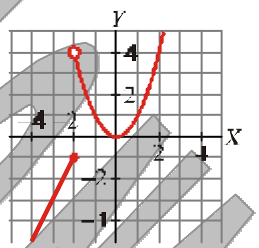
c) $f'(x)=e^{7x^4-3}\cdot\left(28x^3\right)=28x^3\cdot e^{7x^4-3}$

2) a) • Si $x\neq-2$, la función es continua.

• Si $x=-2$,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}(2x+3)=-1\\ \lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(x^2\right)=4\end{array}\right\}\ \text{Son distintos}\ \rightarrow\ \text{La función es discontinua en } x=-2$$

b) • Si $x\le-2$, es un trozo de recta.
• Si $x>-2$ es un trozo de parábola.
• La gráfica es:



3)

- $y'=4x+3$
- La pendiente de la recta es $y'(1)=7$.
- Cuando $x=1$, $y=4$.
- La recta será:

$$y=4+7(x-1)=4+7x-7=7x-3$$

4) • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2-9x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2-9x\right)=+\infty$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X\rightarrow x^3+3x^2-9x=x\left(x^2+3x-9\right)=0$

$$\begin{cases}x=0\ \rightarrow\ \text{Punto}(0,0)\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+36}}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=1{,}86\ \rightarrow\ \text{Punto}(1{,}86;\,0)\\ x=-4{,}9\ \rightarrow\ (-4{,}9;\,0)\end{cases}\end{cases}$$

Con el eje $Y\ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ y=0\ \rightarrow\ \text{Punto}(0,0)$

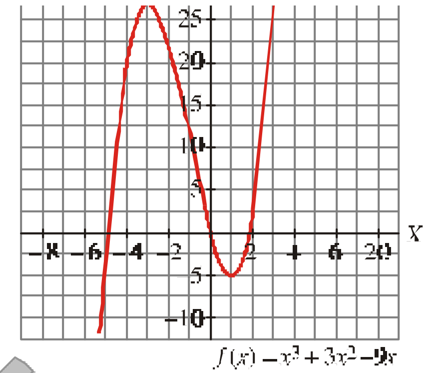
• Puntos singulares:

$$f'(x)=3x^2+6x-9=0\ \Rightarrow\ x=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{6}=\frac{-6\pm12}{6}\begin{cases}x=-3\ \rightarrow\ \text{Punto }(-3,27)\\ x=1\ \rightarrow\ \text{Punto }(1,-5)\end{cases}$$

Crecimiento:

Máximo (-3, 27)
Mínimo (1,-5)

Gráfica:



5)

a) • Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $x^2+x+1=0$ $\rightarrow$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ $\rightarrow$ No corta al eje X.

  Con el eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=1$ $\rightarrow$ Punto $(0,1)$

- Asíntota vertical: $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \; ; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntota oblicua:

$\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1}$ $\Rightarrow$ $y = x$ es asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x+1} > 0$ $\Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

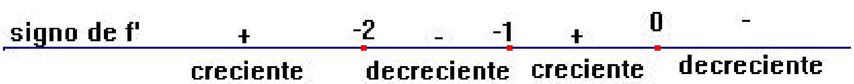
Si $x \to -\infty$, $\dfrac{1}{x+1} < 0$ $\Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

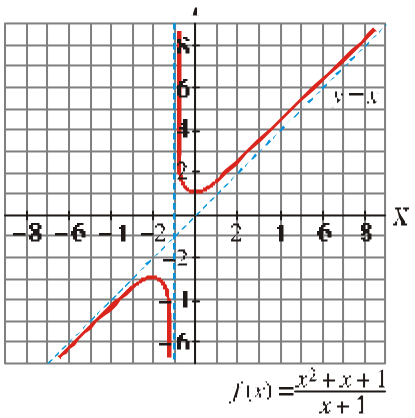
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+2x = x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,1) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2,-3) \end{cases}$$

- Crecimiento:





Mínimo (0,1)
Máximo (-2,-3)